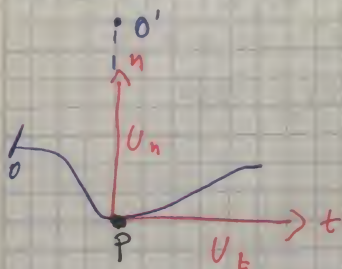


Movimiento Curvilíneo

• Componentes normales y tangenciales

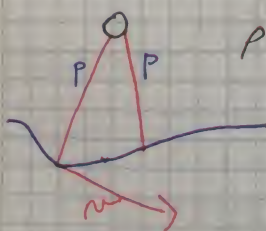
Cuando se conoce la trayectoria que sigue una partícula, muchas veces es conveniente describirla utilizando las coordenadas "n" y "t" que actúan en forma normal y tangencial en relación con la trayectoria respectivamente, y en el instante considerado tienen en su origen ubicado en la partícula.



Posición:

$U_t = \text{vector unitario} = U_n$

El eje t es tangente a la curva en P y es positivo en la dirección de aumento de s .



$\rho = \text{radio de curvatura}$

Velocidad

$$V = V U_t$$

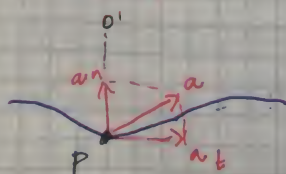
$$V = \dot{s}$$

Donde

$$a = a_t U_t + a_n U_n$$

$$a_t = \dot{v} \quad \text{ó} \quad a_t = v \frac{ds}{dt}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

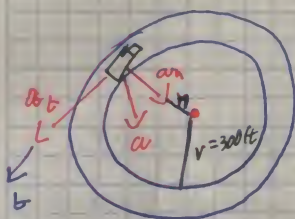


$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Si la trayectoria se expresa como $y = F(x)$, el radio de curvatura en cualquier punto de la trayectoria se calcula a partir de la ecuación:

$$\rho = \left| \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2} \right|$$

9.) Un automóvil de carreras recorre una pista circular horizontal que tiene un $r = 300$ pies. Si el auto aumenta su rapidez $a_t = 7$ pies/ seg^2 desde el reposo, determine el tiempo para alcanzar $a = 8$ pies/ seg^2 . $N_f = ?$



$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$a_t = 7 \text{ pies}/\text{seg}^2 \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$\rho = 300 \text{ pies}$$

$$N = N_0 + (a_t)t = 0 + 7t$$

$$N = 7t$$

$$a_n = \frac{(7t)^2}{300} = 0.163 t^2 \text{ pies}/\text{seg}^2$$

la aceleración que alcanza es de $8 \text{ pies}/\text{seg}^2$

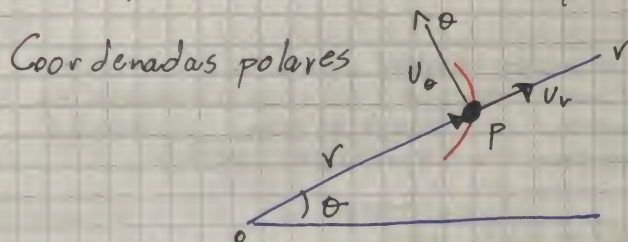
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \Rightarrow 8 = \sqrt{(7)^2 + (0.163 t^2)^2}$$

$$0.163 t^2 = \sqrt{(8)^2 - (7)^2} \Rightarrow t = 4.87 \text{ seg}$$

$$N = 7t = 7(4.87) = 34.1 \text{ pies}/\text{seg}$$

• Componentes Cilíndricas

En algunos problemas de ingeniería es conveniente expresar la trayectoria del movimiento de una partícula en términos de coordenadas cilíndricas r , θ y z . Si el movimiento se limita al plano, se emplean las coordenadas polares r y θ .



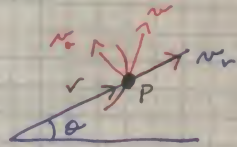
Posición

Es posible especificar la ubicación de la partícula P , utilizando la coordenada radial " r " la cual se extiende hacia afuera desde el origen fijo " O " a la partícula, y una coordenada transversal " θ ", que es el ángulo medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj entre una línea ^{fija} de referencia y el eje " r ", por lo general el ángulo se mide en grados o radianes. Las direcciones positivas de las coordenadas " r " y " θ " se definen por medio de los vectores unitarios u_r y u_θ .

Posición:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$$

Velocidad:



$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta$$

$$\mathbf{v} = N_r \mathbf{u}_r + N_\theta \mathbf{u}_\theta$$

$$N_r = \dot{r} \quad N_\theta = r \dot{\theta}$$

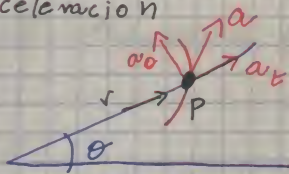
La componente radial N_r es una medida del aumento o reducción en la longitud de la coordenada radial, es decir \dot{r} ; es posible interpretar la componente transversal N_θ como la rapidez de movimiento a lo largo de un círculo de radio r

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

Velocidad angular rad/seg

$$v = \sqrt{(\dot{r})^2 + r(\dot{\theta})^2}$$

Aceleración



$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r} \mathbf{u}_r + \dot{r} \dot{\theta} \mathbf{u}_r + r \ddot{\theta} \mathbf{u}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + r \ddot{\theta} \mathbf{u}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta$$

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{u}_r + a_\theta \mathbf{u}_\theta$$

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}$$

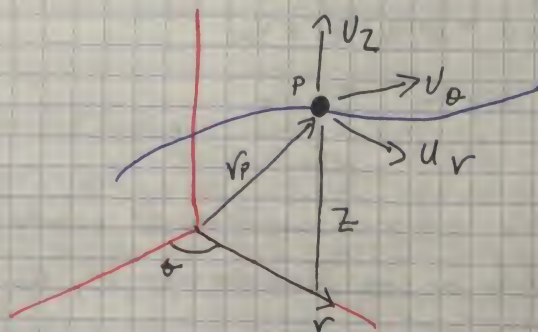
El término $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d(\dot{\theta})}{dt}$

se conoce como aceleración angular (rad/seg)

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2)^2 + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta})^2}$$

La dirección se determina a partir de la suma vectorial de sus dos componentes

Coordenadas cilíndricas



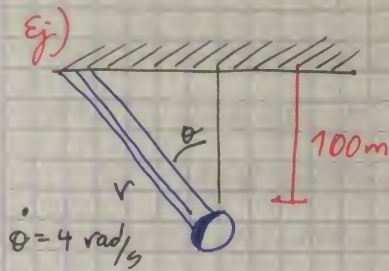
Si la partícula P se desplaza, es posible delimitar su ubicación por medio de tres coordenadas cilíndricas r, θ, z .

La coordenada z es idéntica a la que se emplea para las coordenadas rectangulares como el vector unitario que define la dirección u_z es cte. la derivada temporal de este vector es cero y por lo tanto es posible describir la posición velocidad y aceleración de la partícula en términos de sus coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{r}_p = r \mathbf{u}_r + z \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + \dot{z} \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \mathbf{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) \mathbf{u}_\theta + \ddot{z} \mathbf{u}_z$$



Un reflector que lanza una mancha de luz sobre un muro que se ubica a 100m de él. Deb la magnitud de N° en los que la mancha para viajar en el muro en el instante $\theta = 45^\circ$. El reflector gira a una rapidez $\dot{\theta}$ de 4 rad/seg

coordenadas:

Para calcular las derivadas temporales necesarias, debemos relacionar r con θ

$$r = \frac{100}{\cos \theta} = 100 \sec \theta$$

$$d(\sec \theta) = \sec \theta \tan \theta d\theta$$

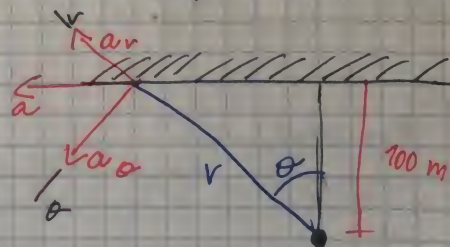
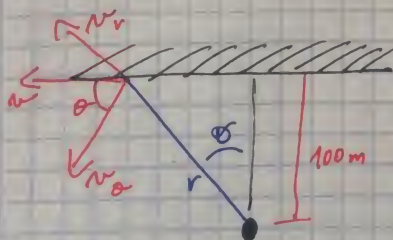
$$d(\tan \theta) = \sec^2 \theta d\theta$$

Velocidad y aceleración

$$\dot{r} = 100 (\sec \theta \tan \theta) \dot{\theta}$$

$$\ddot{r} = 100 (\sec \theta \tan \theta) \ddot{\theta} (\tan \theta) \dot{\theta} + 100 \sec \theta (\sec^2 \theta) \dot{\theta} (\dot{\theta}) + 100 \sec \theta \tan \theta (-\ddot{\theta})$$

$$\ddot{r} = 100 \sec \theta \tan^2 \theta (\dot{\theta})^2 + 100 \sec^3 \theta (\dot{\theta})^2 + 100 (\sec \theta \tan \theta) \ddot{\theta}$$



$$\text{Como } \dot{\theta} = 4 \text{ rad/s} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

$$\theta = 45^\circ$$

$$r = 100 \sec 45^\circ = 141.4$$

$$\dot{r} = 100 (\sec 45^\circ \tan 45^\circ) (4) = 565.7$$

$$\ddot{r} = 100 \sec 45^\circ \tan^2 45^\circ (4)^2 + 100 \sec^3 45^\circ (4)^2 + 100 (\sec 45^\circ \tan 45^\circ) (0)$$

$$\ddot{r} = 1600 (\sec 45^\circ \tan 45^\circ + \sec^3 45^\circ) = 6788.2$$

$$v = \dot{r} U_r + r \dot{\theta} U_\theta$$

$$= 565.7 U_r + 141.4 (4) U_\theta$$

$$v = 565.7 U_r + 565.7 U_\theta$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{(565.7)^2 + (565.7)^2} = 800 \text{ m/s}$$

$$a = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) U_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) U_\theta$$

$$a = [6788.2 - 141.4 (4)^2] U_r + [141.4 (0) + 2 (565.7) 4] U_\theta$$

$$a = 4525.8 U_r + 4525.8 U_\theta$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(4525.8)^2 + (4525.8)^2}$$

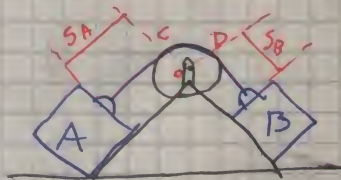
$$a = 6400 \text{ m/s}^2$$

Tarea:

una partícula...

Análisis del movimiento dependiente absoluto de las partículas:

En ciertos problemas el movimiento de una partícula dependerá del movimiento de otra. Esta dependencia ocurre si las partículas se encuentran interconectadas por correas no extensibles en torno a poleas.



$$L_T = S_A + l_p + S_B$$

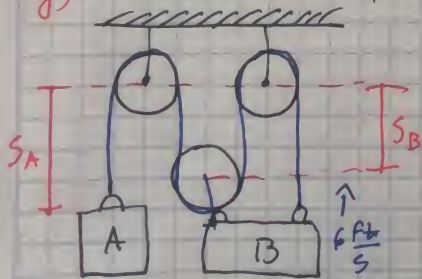
Velocidad

$$\frac{dS_B}{dt} + \frac{dS_A}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{v_B = -v_A}$$

El signo negativo indica que cuando el bloque A tiene velocidad hacia abajo, B tiene la misma pero hacia arriba.

De manera similar, la diferenciación en el tiempo en las velocidades proporciona la relación $\Rightarrow a_B = -a_A$

Ej) Determine la rapidez de A, si B tiene $v = 6 \text{ pies/seg} \uparrow$



$$L_T = S_A + 3S_B$$

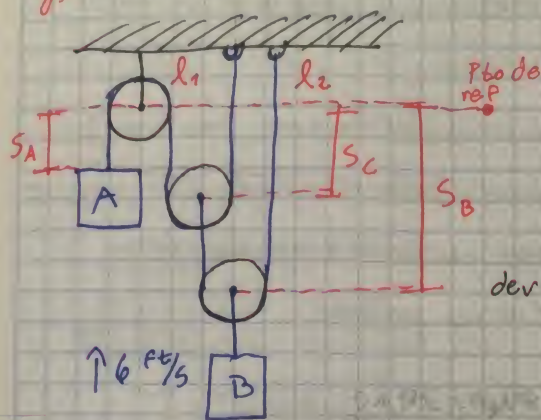
derivada temporal $v_A + 3v_B = 0$

$$v_A = -3v_B$$

$$v_A = -3(6)$$

$$v_A = 18 \text{ pies/seg} \downarrow$$

ej) Determine la rapidez del bloque A, si B tiene $6 \text{ ft/s} \uparrow$



$$l_1 = S_A + 2S_C$$

$$l_2 = S_B + (S_B - S_A)$$

igualamos para eliminar S_C

$$S_A + 4S_B = 2l_2 + l_1$$

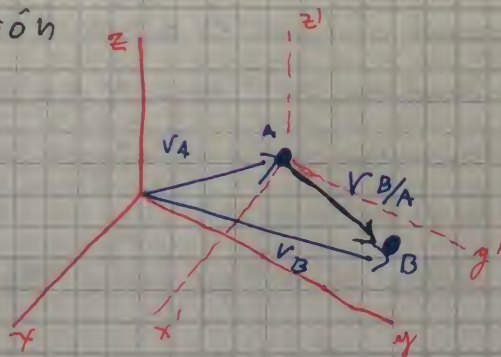
derivado

$$V_A + 4V_B = 0$$

$$V_A = -4(6) = 24 \text{ pies/seg} \downarrow$$

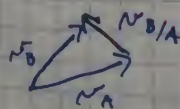
Análisis del movimiento relativo de dos partículas por medio de ejes de traslación.

Posición



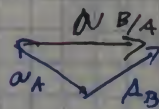
$$V_B = V_A + V_{B/A}$$

Velocidad



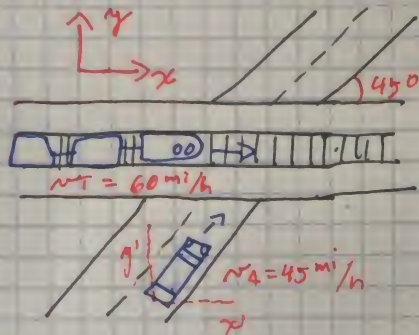
$$V_B = V_A + V_{B/A}$$

aceleración



$$a_B = a_A + a_{B/A}$$

Ej) Un tren eléctrico viaja con una rapidez constante de 60 mi/h cruza un puente que se encuentra sobre un camino. Si el automóvil viaja por el camino a 45 mi/h , determine la velocidad relativa del tren con respecto al automóvil



Se determina

$$\vec{v}_T = \vec{v}_A + \vec{v}_{T/A}$$

$$\vec{v}_T = 60 \text{ mi/h}$$

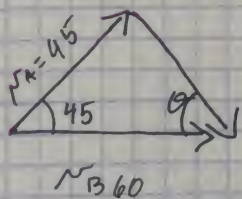
$$\vec{v}_A = 45 \text{ mi/h}$$

Un análisis vectorial, usando los ejes "x" y "y", análisis cartesiano

$$60 \hat{i} = (45 \cos 45 \hat{i} + 45 \sin 45 \hat{j}) + \vec{v}_{T/A}$$

$$\vec{v}_{T/A} = (28.2 \hat{i} - 31.8 \hat{j}) \text{ mi/h}$$

$$v_{T/A} = \sqrt{(28.2)^2 + (-31.8)^2} = 42.5 \text{ mi/h}$$



$$\tan \theta = \frac{(v_{T/A})_y}{(v_{T/A})_x} = \frac{31.8}{28.2}$$

$$\theta = 48.4^\circ$$

